



ทบทวน คณิตศาสตร์ ที่ต้องใช้ ในฟิสิกส์ ม.ปลาย
ภาพรวมที่ต้องใช้บ่อย ๆ

- ✓ 1. การบวก ลบ คูณ หาร เลขจำนวนจริง
- ✓ 2. เลขยกกำลัง รากที่ n เลขยกกำลังฐาน 10 และสัญกรณ์วิทยาศาสตร์
- ✓ 3. การแก้พหุนามตัวแปรเดียวและหลายตัวแปร
- ✓ 4. เรขาคณิต
 - 1) มุม
 - 2) ทิศทาง
 - 3) เส้นขนาน
 - 4) มุมฉาก
 - 5) สามเหลี่ยม
 - 6) สี่เหลี่ยม
 - 7) วงกลม
- ✓ 5. สามเหลี่ยมมุมฉาก-สามเหลี่ยมใด ๆ และตรีโกณมิติ
- ✓ 6. พื้นผิวและปริมาตร
 - 1) ความยาวเส้น
 - 2) พื้นที่
 - 3) ปริมาตร
- ✓ 7. การบวกเวกเตอร์เริ่มต้น
- ✓ 8. การโปรเจกต์เวกเตอร์เข้าแกน = การแตกเวกเตอร์
- ✓ 9. การประยุกต์ใช้เส้นจำนวนบอกทิศทางของเวกเตอร์ใน 1 มิติ
- ✓ 10. การประยุกต์ใช้กราฟ
 - 1) ลักษณะกราฟ
 - 2) การหาความชันกราฟ
 - 3) การหาพื้นที่ใต้กราฟ

สิ่งสำคัญที่สุด สำหรับการเรียนฟิสิกส์ในระดับชั้นมัธยมปลาย คือ ..

- 1) ต้องรู้ว่า ฟิสิกส์จริง ๆ ทฤษฎีมีนิดเดียว ทุกบท
- 2) กรณีที่เห็นว่าแตกย่อยได้เป็นแบบนี้แบบนี้ และแบบนี้ เกิดจากการแตกการแก้คณิตศาสตร์
- 3) อย่าจำ ว่าเจอแบบนี้แก้แบบนี้ เจอแบบนี้ต้องแก้แบบนี้ ไม่ว่าจะเป็บทไหนก็ตาม
- 4) แยกปัญหาให้ดี ว่าตัวเองแก้ฟิสิกส์ไม่ได้ (ไม่รู้จักตัวแปร ไม่รู้สูตร) หรือรู้ฟิสิกส์ แต่แก้เอาคำตอบหรือองค์ประกอบของตัวแปรที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ช่วยออกมาไม่ได้
- 5) ภาพรวมของคณิตศาสตร์ที่ใช้ในฟิสิกส์ มาจากคณิตศาสตร์ มัธยมต้น (เกือบทั้งหมด)
- 6) เก็บพื้นฐานคณิตศาสตร์ตรงนี้ไว้ให้ดี สลับใช้ไปมาในอีกหลาย ๆ เรื่องแน่นอน





การฝึกมองโจทย์ฟิสิกส์เป็นพหุนามหลายตัวแปร

ภาพรวมของคณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์พหุนาม

- (1) ไม่ทราบค่า 1 ตัวแปร ควรมี ____ สมการ
- (2) ไม่ทราบค่า 2 ตัวแปร ควรมี ____ สมการ
- (3) ไม่ทราบค่า 3 ตัวแปร ควรมี ____ สมการ

👉 ในระดับคัดค่าย ควรจะตั้งที่ 3 ตัวแปร ถ้ามากกว่านี้ จะโตไปใช้เมทริกซ์เพื่อแก้คำตอบ

ภาพรวมโจทย์ที่มักเจอ

- (1) เหตุการณ์สัมพันธ์กัน
- (2) เหตุการณ์ต่อเนื่องกัน

ตัวอย่าง

ปริมาณในการเคลื่อนที่ อัตราเร็ว ()

ความเร็ว ()

การเคลื่อนที่แนวตรง ควรรู้ การเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง () = การกระจัด ()

ความเร็ว v คงที่

ความเร่ง a คงที่

การตกอิสระ
(ภายใต้แรงโน้มถ่วง g)

1. [สมาคม] อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งได้ $1/4$ รอบ ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย v
ในช่วงเวลาหนึ่ง จงหาขนาดของความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลาเดียวกันนี้ $[\frac{2\sqrt{2}}{\pi} v]$





2. [60] ลิฟต์ตัวหนึ่งเดิมอยู่นิ่ง จากนั้นเคลื่อนที่ขึ้นด้วยอัตราเร่งคงตัว 2.0 เมตร/วินาที² ในทิศขึ้น เมื่อเวลาผ่านไป 2.0 วินาที หลอดไฟซึ่งอยู่สูงจากพื้นลิฟต์ 2.95 เมตร เริ่มหลุดจากเพดานลิฟต์ จงหาว่า หลอดไฟจะอยู่ในอากาศนานกี่วินาที ก่อนที่จะกระทบพื้นลิฟต์ กำหนดให้ $g = 9.8$ เมตร/วินาที²

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $\sqrt{2}$
4. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

3. [61] โยนลูกเทนนิสขึ้นในแนวตั้ง 3 ลูก ติดต่อกัน จากตำแหน่งเดียวกัน ด้วยอัตราเร็วต้น 9.80 เมตรต่อวินาที เท่ากัน โดยเว้นช่วงเวลาระหว่างการโยนลูกถัดไป 1.00 วินาที

จงหาว่าลูกเทนนิสลูกที่ 2 และ 3 จะสวนกันที่ระยะความสูงจากตำแหน่งที่โยนกี่เมตร

1. 1.2
2. 3.7
3. 4.9
4. 6.1



การบวกเวกเตอร์เริ่มต้น

1. ข้ามขั้นไปจับ ว่าของฟิสิกส์หลัก ๆ ใช้การวาดเวกเตอร์เพื่อบ่งภาพรวมของมุมสำหรับคำนวณเท่านั้น
2. ส่วนใหญ่จะใช้ตรีโกณพื้นฐาน สามเหลี่ยมมุมฉาก สามเหลี่ยมใด ๆ เพื่อการแก้คำตอบ
3. ทุกปริมาณที่เป็นเวกเตอร์ในฟิสิกส์ ใช้หลักการเดียวกันทั้งหมด

ตัวอย่าง แรง, ความเร็วลัพธ์, โมเมนตัม และสนามของแรง (เจอบ่อยเป็นสนามไฟฟ้า)

4. ภาพรวมการรวมเวกเตอร์

- 1) เวกเตอร์ 1 มิติ (อยู่บนแนวตรง ทั้งทิศเดียวกันและทิศตรงข้าม)

 ทิศเดียวกัน

 ทิศตรงข้าม

 ทิศผสม

- 2) เวกเตอร์ 2 มิติ (มีราบ-ตั้ง/เอียง-เอียงผสมกัน)

 เวกเตอร์ตั้งฉาก

 เวกเตอร์ทำมุม θ ใด ๆ ต่อกัน

- 3) การเท่ากันของเวกเตอร์ ต้องเท่าทั้งขนาดและทิศทาง

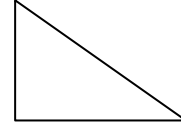




การประยุกต์ตรีโกณมิติ

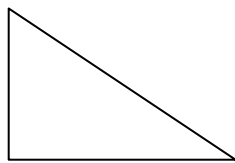
1) สามเหลี่ยมมุมฉาก

• ความสัมพันธ์ของด้าน



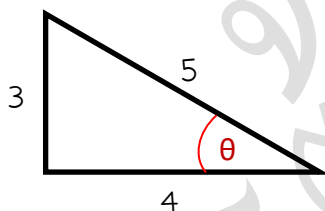
• ความสัมพันธ์ของมุม (ได้มาจากระบบสามเหลี่ยมคล้ายแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน)

นิยามค่าตรีโกณ



• ส่วนกลับของค่าหลักในตรีโกณ

ตัวอย่าง



$$\sin \theta = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} = \frac{4}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{5}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{3}$$

ตัวอย่าง

ถ้า $\sin A = \frac{5}{13}$ จงหาค่าของ $\cos A$ และ $\tan A$

ตัวอย่าง

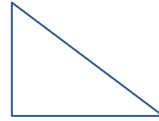
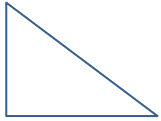
ถ้า $\tan C = 1$ จงหาค่าของ $\sin C$ และ $\cos C$



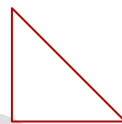
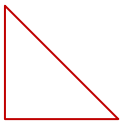
2) ค่าตรีโกณของมุมที่ต้องรู้จัก

Note !! อย่าเียติดใจว่าต้องมีมุมถึงจะถอดค่าตรีโกณได้ อัตราส่วนด้านมาก่อนมุม

[1] สามเหลี่ยมด้าน 3-4-5



[2] สามเหลี่ยมมุม 45° - 45°



[3] สามเหลี่ยมมุม 30° - 60°

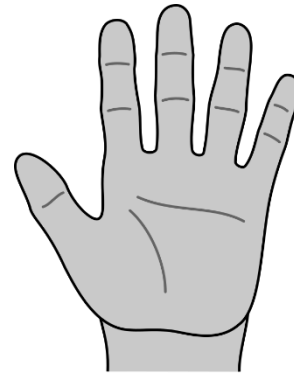


[4] ค่าตรีโกณ VS มือซ้ายหงายมือ

นิ้ว นิ้วเหลือซ้าย

นิ้ว นิ้วเหลือขวา

นิ้ว ซ้าย : ขวา

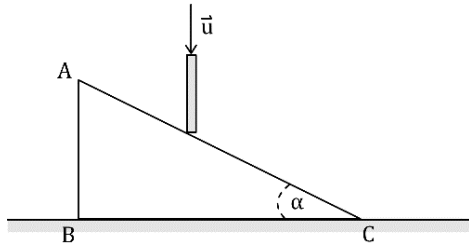


ค่า \ มุม	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					
$\tan \theta$					



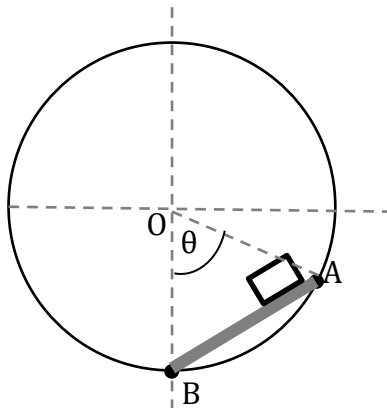


4. [สามัญ'60] จากรูปหากทำการกดแท่งไม้ PQ ลงด้วยความเร็ว u ลิ้มรูปสามเหลี่ยม ABC จะเคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยความเร็วขนาดเป็นเท่าใด



1. $u \cos \alpha$
2. $u \sin \alpha$
3. $u \sec \alpha$
4. $u \csc \alpha$
5. $u \cot \alpha$

5. [สามัญ'59] จากรูปจงหาความเร่งบนพื้นเอียงของวัตถุในแนว AB



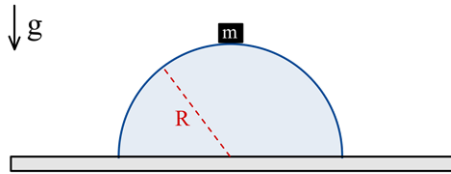
1. $g \sin \theta$
2. $g \cos \theta$
3. $g \tan \theta$
4. $g \sin(\theta/2)$
5. $g \cos(\theta/2)$

6. [60] กระจกนูนเป็นเครื่องเล่น โดยทั่วไปมักออกแบบให้ช่วงบนของกระจกนูนมีความชันมาก แล้วค่อย ๆ ลดความชันลงที่ปลายด้านล่างของกระจกนูน ขนาดของความเร็วและและขนาดของความเร่งของเด็กขณะที่เล่นกระจกนูนจะเป็นอย่างไร

1. ขนาดของความเร็วและความเร่งมีค่าคงที่
2. ขนาดของความเร็วและความเร่งเพิ่มขึ้น
3. ขนาดของความเร็วเพิ่มขึ้น ขนาดของความเร่งคงที่
4. ขนาดของความเร็วเพิ่มขึ้น ขนาดของความเร่งลดลง



7. [สมาคม] มวล m ไถลงจากยอดครึ่งวงกลมมีรัศมี $R = 20.0$ เซนติเมตร

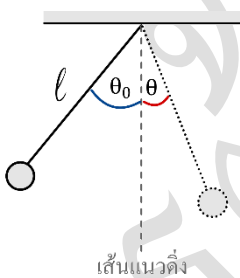


จงหามวล m จะหลุดออกจากผิวทรงกลมที่ระดับความสูงกี่เซนติเมตรจากพื้น

1. 5.00 cm
2. 6.67 cm
3. 10.0 cm
4. **13.33 cm**
5. 15.00 cm

8. [59] ลูกตุ้มอย่างง่ายมวล m ยาว l ปล่อยจากหยุดนิ่งจากมุม θ_0 จงหาความตึงในสายของลูกตุ้มเมื่อแกว่งมาถึงตำแหน่งเชือกทำมุม θ กับแนวตั้ง

$[mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)]$





• ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณ (arc___)

💡 กรณีค้่นค่าตรีโกณนั้น ๆ

💡 กรณีไม่ค้่นค่าเลย

📄 ตัวอย่าง จงหาค่าของมุม θ ดังต่อไปนี้

1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$

2) $\cos \theta = \frac{3}{5}$

3) $\sin \theta = \frac{2}{3}$

4) $\tan \theta = 4$

5) $\sin \theta = \mu$

6) $\cos \theta = 1 - \mu^2$

• ต้องรู้ ความสัมพันธ์ของ sine และ cosine ของมุมใด ๆ

💡 มุมรวมกันของมุมเท่ากับมุมฉาก

กรณีที่ _____ จะได้ว่า _____

📄 ตัวอย่าง

$\sin 30^\circ =$ _____

$\cos 53^\circ =$ _____

$\cos 30^\circ =$ _____

$\sin 45^\circ =$ _____

💡 ผลรวมกันของมุมเท่ากับเส้นตรง

💡 ผลรวมกันของมุมเท่ากับเส้นตรง

กรณีที่ _____ จะได้ว่า _____

📄 ตัวอย่าง

$\sin 150^\circ =$ _____

$\sin 135^\circ =$ _____

$\cos 120^\circ =$ _____

$\cos 135^\circ =$ _____

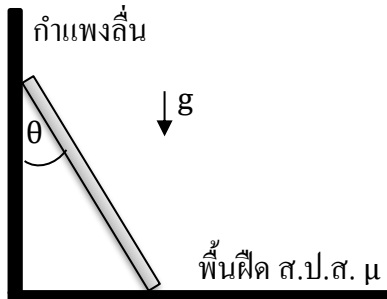
💡 ผลรวมกำลังสองของค่า sine และ cosine จะได้ว่า _____

📄 ตัวอย่าง

กำหนดให้ $\sin \theta = \mu$ จงหาค่าของ $\cos \theta$

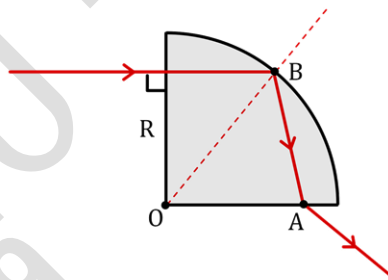


9. [สามัญ'57] ท่อนไม้โตสมำเสมอวางปลายบนพังกำแพงลื่น ปลายล่างอยู่บนพื้นฝืดมีสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานเป็น μ จงหาค่าของ θ ที่โตที่สุดที่ท่อนไม้สามารถพังกอยู่ได้โดยไม่ไถลง



1. $\arctan(\mu)$
2. $\text{Arctan}(2\mu)$
3. $\arctan(1/\mu)$
4. $\arctan(1/2\mu)$
5. $\arctan\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)$

10. [สามัญ'56] ฉายแสงตกกระทบบังจากตั้งฉากกับแท่งวงกลมรัศมี R วงกลมดั่งรูป ซึ่งมีดัชนีการหักเห n ทำการเลื่อนตำแหน่งแสงจนกระทั่งตำแหน่งของแสงแสดงดั่งรูป เริ่มเกิดการสะท้อนกลับหมดที่จุด B พอดี

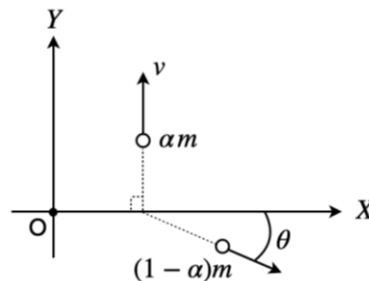


จงหาระยะ OA เมื่อ $n > \frac{2}{\sqrt{3}}$

1. $\frac{R}{2}$
2. $\frac{R}{2} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
3. $\frac{R}{2} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$
4. $R \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
5. $R \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$



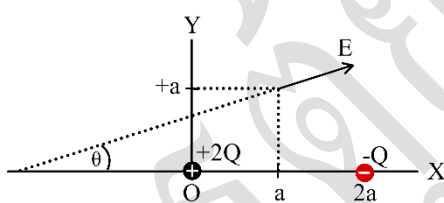
11. [66] จังหวะที่มวล m กำลังเคลื่อนที่เร็ว u ในทิศบวกของแกน OX ของระบบเฉื่อย OXY นั้น มันระเบิดออกเป็นสองชิ้น คือ αm กับ $(1 - \alpha)m$ ดังรูป



หาก αm มีความเร็ว v ในทิศ OY จงหาทิศทางที่ชิ้น $(1 - \alpha)m$ เคลื่อนที่ว่าทำมุม θ เท่าไรกับแกน OX

1. $\tan\theta = \frac{v}{\alpha u}$
2. $\tan\theta = \frac{\alpha v}{u}$
3. $\tan\theta = \frac{\alpha u}{v}$
4. $\tan\theta = \frac{u}{\alpha v}$

12. [65] จงหาค่ามุม θ ที่สนามไฟฟ้าลัพธ์ E ที่จุด (a, a) ทำกับแกน OX E เกิดจากประจุ $+2Q$ กับ $-Q$ ที่ตำแหน่ง $(0, 0)$ กับ $(2a, 0)$ ตามลำดับ



1. 60°
2. 45°
3. $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\arctan\frac{1}{3}$

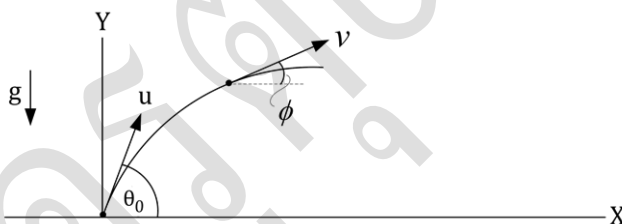


13. [สมาคม] มวล m ความเร็ว 5 เมตร/วินาที วิ่งเข้าชนมวล m เท่ากันซึ่งอยู่นิ่ง แบบไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล หลังชนมวลที่ถูกชนเคลื่อนที่ในทิศ 37 องศา กับแนวการเคลื่อนที่ของมวลที่วิ่งเข้าชน และมีความเร็วเป็น 4 เมตร/วินาที มวลแรกจะทำมุมเท่าใดกับทิศการเคลื่อนที่ก่อนชนและมีขนาดของความเร็วหลังชนเป็นเท่าใด
1. มุม 37 องศา ขนาดเป็น 4 เมตร/วินาที
 2. มุม 37 องศา ขนาดเป็น 5 เมตร/วินาที
 3. มุม 53 องศา ขนาดเป็น 3 เมตร/วินาที
 4. มุม 53 องศา ขนาดเป็น 4 เมตร/วินาที

14. [63] วัตถุโปรเจกไทล์ขึ้นจากจุด O เมื่อเวลา $t = 0$ ด้วยความเร็วต้น u และมุมตั้งต้น θ จงหาค่าของ $\tan\Phi$ ที่ ณ เวลาใด ๆ เมื่อ Φ เป็นมุมที่เวกเตอร์ความเร็ว v ที่เวลา t นั้น ทำกับทศบวกของแกน X

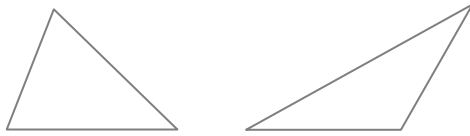
ให้ตอบในเทอมของ u, θ, g และ t

$$\left[\tan\theta - \frac{gt}{\cos\theta} \right]$$



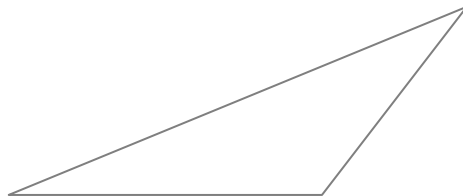


3) สามเหลี่ยมใด ๆ



💡 ลัดส่วนระหว่างด้านและ sin ของมุมตรงข้าม

💡 การหาความยาวด้านที่เหลือ จากอีกสองด้านที่ทราบมุมประกอบ



⚙️ การประยุกต์ใช้ในวิชาฟิสิกส์ การหาขนาดของเวกเตอร์ เช่น _____

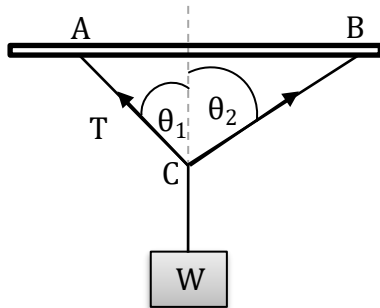
1) การหาแรงลัพธ์

2) การหาโมเมนตัมลัพธ์

3) การคำนวณสมดุล 3 แรงของลามี

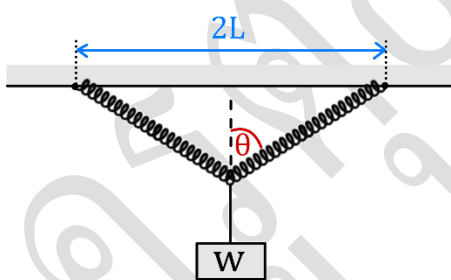


15. [สามัญ'59] ระบบสมดุล แขนงน้ำหนัก W ด้วยเชือกเบามาก AC และ BC โดยจุดที่ตรึงเชือก A และ B ที่เพดานซึ่งอยู่ในแนวระดับเท่ากัน ดังรูปจงหาแรงดึงเชือก T ในเส้น AC ว่ามีค่าเป็นเท่าใด



1. $\frac{\sin \theta_1}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} W$
2. $\frac{\sin \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} W$
3. $\frac{\cos \theta_1}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} W$
4. $\frac{\cos \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} W$
5. $\frac{\cos \theta_2}{\cos (\theta_1 + \theta_2)} W$

16. [สามัญ'61] สปริงยาว $2L$ ถูกผูกด้วยวัตถุมวล m ที่กึ่งกลางแล้วทำให้สปริงยืดออก แล้วมีลักษณะเป็นดังรูป หากกำหนดให้ค่าคงตัวของสปริงเป็น K จงหาว่าน้ำหนัก w ที่ผูกติดสปริงนี้มีค่าเป็นเท่าใด



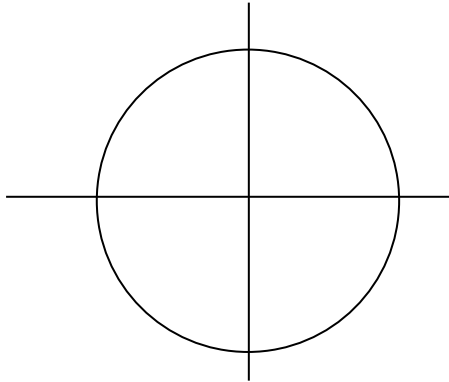
1. $2KL(\cot \theta - \cos \theta)$
2. $2KL(\sin \theta - \cos \theta)$
3. $2KL(\tan \theta - \cos \theta)$
4. $2KL(\operatorname{cosec} \theta - \cos \theta)$
5. $\frac{2KL}{(\cot \theta - \cos \theta)}$



การประยุกต์ตรีโกณมิติ

1. วงกลม 1 หน่วย

คู่อันดับ ที่ Q_1

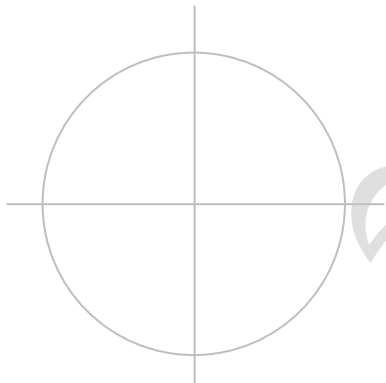


💡 จุดสังเกต กรณีหาค่าตรีโกณของมุมป้าน

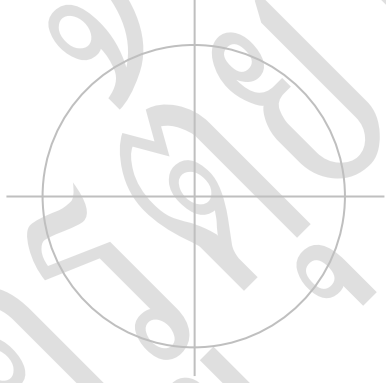
$$\sin \theta_{\text{มุมป้าน}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos \theta_{\text{มุมป้าน}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

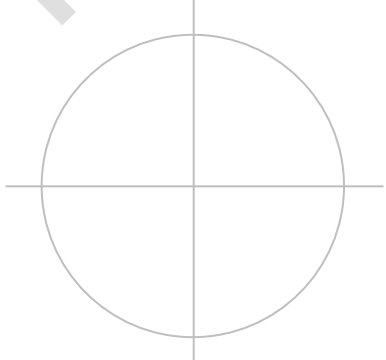
📄 set 30°



📄 set 45°



📄 set 60°





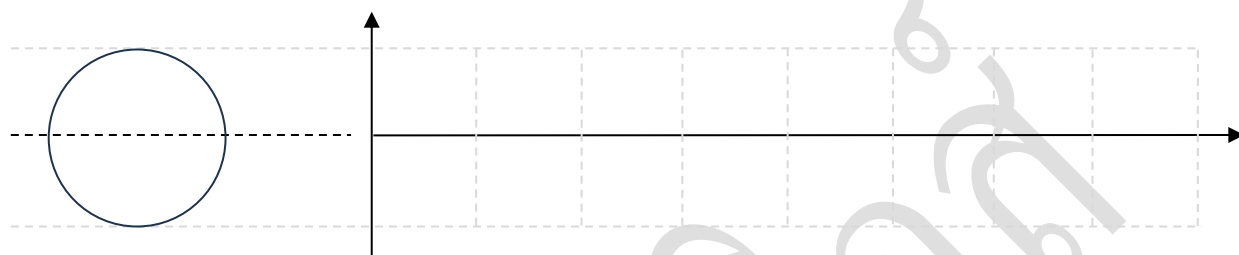
2. สมการคลื่น (wave function)

อธิบาย การสั่นในการเคลื่อนที่ฮาร์โมนิกอย่างง่าย

การสั่นของตัวกลางเมื่อคลื่นเคลื่อนที่ผ่าน

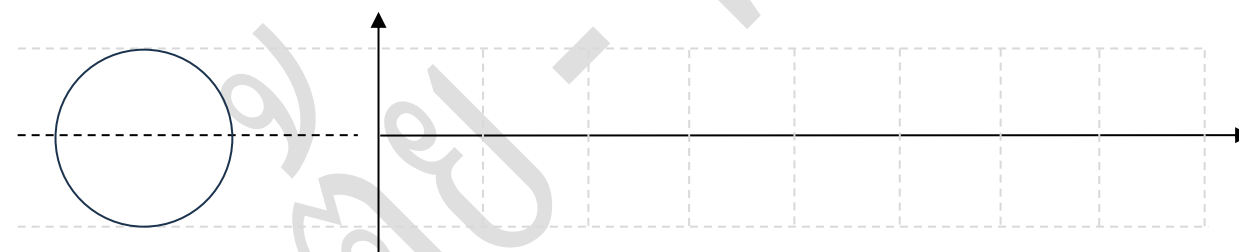
ตัวอย่าง 1 $Y = A \sin X$

X (°)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390
Y														



ตัวอย่าง 2 $Y = A \sin(X + 30^\circ)$

X (°)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390
Y														



3. สูตรตรีโกณพื้นฐานที่ควรรู้

ผล บวก/ลบ

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

มุม 2 เท่า

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

ผลรวม

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

เอกลักษณ์ตรีโกณ

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A$$





17. [66] กำนหนดลให้คลลัน $\Psi_1(x,t) = \sin(x - t)$ และ $\Psi_2(x,t) = \sin(x + t)$ ช้่ง x แทนตำแหน่งบนแกน OX

และ t แทนเวลา กราฟข้อใดเป็น $\Psi(x,t) \equiv \Psi_1 + \Psi_2$ ที่เวลา $t = \pi$

